Série 3 –Cinématiques des fluids Correction

Exercice 1

3.1

$$u = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x + t$$

La solution de l'équation ci-dessus est : $x = Ae^t - t - 1$

La constante A peut être déterminée par les conditions initiales :

$$x_0 = Ae^{t_0} - t_0 - 1 \Rightarrow A = \frac{x_0 + t_0 + 1}{e^{t_0}}$$

Par conséquent : $x = (x_0 + t_0 + 1)e^{(t-t_0)} - t - 1$

Cette dernière équation est la version lagrangienne de la particule fluide satisfaisant $x = x_0$ à $t = t_0$.

Exercice 2

1. L'écoulement n'est pas stationnaire, car t figure dans u et v.

   On calcule $\operatorname{div}\vec{U}$: $\operatorname{div}\vec{U} = \partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z = \omega$. Donc l'écoulement n'est pas incompressible car $\operatorname{div}\vec{U}$ est non nul.

   On calcule $\operatorname{rot}\vec{U}$:

$$\operatorname{rot}\vec{U} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{e}_z = \vec{0}$$

   L'écoulement est irrotationnel.

2. On cherche s'il existe une fonction $\phi = \phi(x, y, z, t)$ telle que :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \omega^2\, y\, t, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \omega^2\, x\, t, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial z} = \omega\, z$$

   On peut vérifier que $\phi = \omega^2\, x\, y\, t + \omega\, z^2/2 + h(t)$ avec $h(t)$ fonction arbitraire de t est le potentiel cherché.

   On peut aussi construire la fonction ϕ de la manière suivante. On intègre la première équation en x d'où : $\phi = \omega^2\, x\, y\, t + F(y, z, t)$ avec $F(y, z, t)$ fonction arbitraire de y, z, t. On dérive ce résultat par rapport à y et on l'identifie avec la seconde équation : $\omega^2\, x\, t + (\partial/\partial y)F(y, z, t) = \omega^2\, x\, t$, d'où l'on déduit que $F(y, z, t)$ ne dépend pas de y. On pose $F(y, z, t) = G(z, t)$, on dérive ϕ par rapport à z et on identifie le résultat avec la troisième équation : $(\partial/\partial z)G(z, t) = \omega\, z$. On obtient ainsi : $G(z, t) = \omega\, z^2/2 + h(t)$ avec $h(t)$ fonction arbitraire de t.

Exercice 3

3.2 Le vecteur vitesse de translation au point (1, 2, 1) et au temps t = 3 s peut être donné par :

$$\vec{U} = (3 \times 1 \times 4)\,\vec{i} + (2 \times 1 \times 2)\,\vec{j} + (2 \times 1 \times 2 + 3 \times 3)\,\vec{k} = 12\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + 13\vec{k}$$

Le vecteur vitesse rotationnelle est :

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \wedge \vec{U}) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & & u_x \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \wedge & u_y \\ \dfrac{\partial}{\partial z} & & u_z \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\vec{j} - \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\vec{k}\right\}$$

$$= \frac{\vec{i}}{2}\left[\frac{\partial(2zy + 3t)}{\partial y} - \frac{\partial(2xy)}{\partial z}\right] + \frac{\vec{j}}{2}\left[\frac{\partial(3xy^2)}{\partial z} - \frac{\partial(2zy + 3t)}{\partial x}\right] + \frac{\vec{k}}{2}\left[\frac{\partial(2xy)}{\partial x} - \frac{\partial(3xy^2)}{\partial y}\right]$$

D'où : $\vec{\omega} = z\vec{i} + (y - 3xy)\vec{k}$ et au point (1, 2, 1) et à $t = 3$ s, $\vec{\omega} = \vec{i} - 4\vec{k}$

Le vecteur tourbillon quant à lui est égal à :

$$\vec{\Omega} = 2\vec{\omega} = 2\vec{i} - 8\vec{k}$$

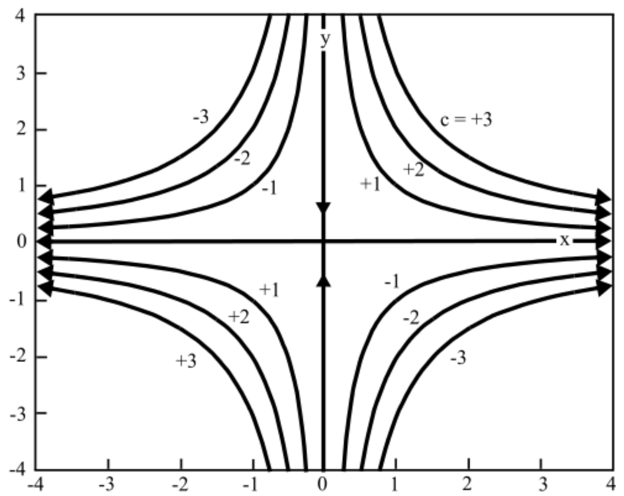
Exercice 4

L'écoulement est dans le plan (x,y) car $v_z = 0$.

a. Le temps n'apparaissant pas explicitement, l'écoulement est stationnaire. Les lignes de
courant correspondent donc aux trajectoires.

b. L'intégration des lignes de courant $\dfrac{dx}{x} = -\dfrac{dy}{y}$ conduit à xy = c (équation d'une hyperbole).

En variant les valeurs de la constante c, on obtient le graphe ci-contre.
La direction est déterminée en se référant à l'expression du champ de vitesse. Notez que ce motif est indépendant de k.



c. Les situations suivantes conduisent à de telles lignes de courant:

1) La collision de deux jets de direction opposée et parallèles à y.
2) La partie y>0 peut représenter un écoulement selon y décroissant arrivant sur une paroi matérialisée par l'axe x.
3) Le quadrant x > 0, y > 0 peut correspondre à l'écoulement dans un coin à angle droit.

Exercice 5

1. La vitesse est :

$$U = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \frac{U_0}{l}\left(x^2 + y^2\right)^{1/2}$$

$$U = U_0 \Leftrightarrow \frac{\left(x^2 + y^2\right)^{1/2}}{l} = 1 \Leftrightarrow \left(x^2 + y^2\right) = l^2.$$

Cette équation correspond à l'équation d'un cercle de centre O et de rayon l. L'écoulement à vitesse 2 U_0 est l'équation d'un cercle de centre O et de rayon 2 l, etc.

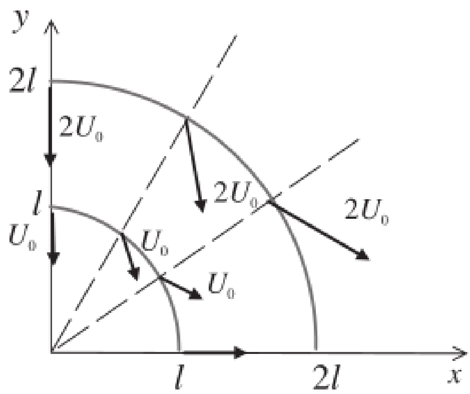


Figure 3.20 – **Représentation de l'écoulement à vitesse U_0, $2U_0$, 20.**

2. L'équation des lignes de courant est :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{u_y}{u_x} = \frac{-(U_0\ /\ l)\,y}{(U_0\ /\ l)\,x} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x} \Rightarrow xy = C$$

le long d'une ligne de courant où C est une constante. La fonction de courant est : $\psi = xy$. Cette fonction est représentée sur la figure ci-dessous pour différentes valeurs de la constante. Elle représente l'écoulement d'un jet sur une plaque.

3. L'accélération est :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \left(\vec{U} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{U} = \cancel{\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}} + u_x \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \vec{U}}{\partial y}$$

D'où

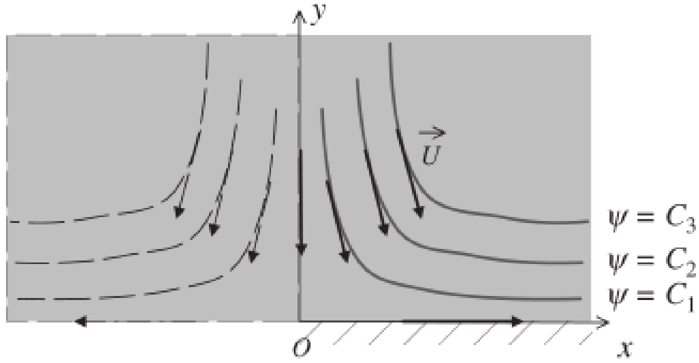
D'où

$$\vec{a} = \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\vec{i} + \left(u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y}\right)\vec{j} = \left(\frac{U_0}{l} x \frac{U_0}{l} + \frac{-U_0}{l}\ y \times 0\right)\vec{i} + \left(\frac{U_0}{l} x \times 0 + \frac{-U_0}{l}\ y\left(\frac{-U_0}{l}\right)\right)\vec{j}$$

D'où finalement :

$$\vec{a} = \frac{U_0^2}{l^2}\left(x\vec{i} + y\vec{j}\right)$$

Figure 3.21 – **Écoulement représentant un jet sur une plaque.**



Exercice 6

a. On considère un liquide parfait incompressible. L'équation de continuité exprime la conservation de la masse du liquide et donc du volume si ρ est constant. En un temps dt, le bilan des volumes s'écrit:

$$V_{entrée} - V_{sortie} = Q_1 dt + Q_3 dt - Q_2 dt = \frac{\pi}{4} D^2 dh \implies \frac{dh}{dt} = \frac{4(Q_1 + Q_3 - Q_2)}{\pi D^2}$$

b. Dans ce cas, $Q_1 + Q_3 = Q_2$ et la vitesse est donnée par: $v_2 = \frac{v_1 D_1^2}{D_2^2} + \frac{4Q_3}{\pi D_2^2}$

Application numérique: $v_2 = 4{,}13$ m/s.